Indicatori di rischio e rendimento

Release 1.0.0

FMA srl
Piazzale Rimembranze, 25
26013 Crema (CR) - Italia
moneycontroller@pec.it
www.moneycontroller.it

MoneyController
€=MC

Scopo del documento

Lo scopo del documento è quello di chiarire le formule di calcolo di alcuni indicatori che vengono utilizzati in Money Controller.

Rendimento Atteso

Il rendimento atteso di un titolo è ottenuto attraverso un calcolo puramente storico (media dei rendimenti giornalieri) ottenuta prendendo tutta la informazione disponibile nella base dati.
Questi rendimenti sono ottenuti come rendimento logaritmico giornaliero e si basano su serie total return ovvero serie che contengono l'intera informazione circa il valore che si otterrebbe da un investimento nel titolo anche dei proventi via via ottenuti dal titolo stesso (ad esempio dividendi o cedole).

Nel caso di titoli obbligazionari, qualora la serie storica Total Return del titolo sia troppo corta essa viene sostituita con la serie dell'indice total return più rappresentativo del suo pattern di rendimento tenendo conto di parametri come la currency, la duration media ed il settore del titolo (government, corporate…)

Equazione 1

$$r_{t0} = \frac{\sum_{t<t0} r_t}{n-1}$$

Dove n rappresenta il numero di rendimenti che possono essere calcolati dai dati disponibili.

La massima perdita ammissibile

La massima perdita ammissibile è l'indicazione da parte dell'investitori di quanta perdita, ovvero rendimento negativo, egli sia disposto a sopportare nell'orizzonte temporale di investimento definito.

Il rendimento target dell'investimento

Questo rappresenta il rendimento percentuale annualizzato che il cliente vorrebbe ottenere dalle proprie risorse finanizarie racchiuse nel portafoglio oggetto di analisi.

Il modello fattoriale usato per la stima della rischiosità di portafoglio.

Consideriamo il caso di un solo asset ed un modello ad *M* fattori il suo rendimento R_a è espresso come:

$$R_a = \alpha_a + \sum_{i=1}^{M} \beta_{ai} R_i + \varepsilon_a$$

dove R_i rappresenta il rendimento dell'i-esimo fattore, β_{ai} la sensibilità dell'asset *a* al fattore, α_a il rendimento indipendente dal fattore ed ε_a il rendimento residuo. Il rischio del singolo fattore, espresso in termini di varianza è:

$$\sigma_a^2 = \sigma_{aa} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \beta_{ai} \beta_{aj} \sigma_{ij} + \sigma_{\varepsilon a}^2$$

dove σ_{ij} , con *i* e *j* che variano da 1 a *M*, è la matrice di *varianza/covarianza* dei fattori. Si ipotizza che il rendimento residuo sia scorrelato dai rendimenti dei fattori. Il termine $\sigma^2_{\varepsilon a}$ è noto come *rischio specifico* dell'asset.

Se si considerano due asset *a* e *b* la loro covarianza risulta espressa come:

$$\sigma_{ab} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \beta_{ai} \beta_{bj} \sigma_{ij}$$

Nel caso di *N* asset, in forma vettoriale i rendimenti e la matrice di varianza/covarianza sono:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}'\mathbf{F} + \mathbf{E}$$

e

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} + \mathbf{\Omega}$$

Dove:
- $\mathbf{R} = \{R_a\}$ con *a* = 1. . .*N* è il vettore dei rendimenti degli asset
- $\mathbf{B} = \{\beta_{ia}\}$ con *i* = 1. . .*M* e *a* = 1. . .*N* è la matrice delle sensibiltà di ciascun asset ai fattori
- $\mathbf{F} = \{R_f\}$ con *f* = 1. . .*M* è il vettore colonna dei rendimenti dei fattori
- $\mathbf{E} = \{\varepsilon_a\}$ con *a* = 1. . .*N* è il vettore colonna dei rendimenti residui degli asset
- $\mathbf{S} = \{\sigma_{ij}\}$ con *i,j* = 1. . .*M* è la matrice di varianza/covarianza dei rendimenti dei fattori
- $\mathbf{\Omega} = \{\sigma^2_{\varepsilon a}\}$ con *a* = 1. . .*N* è la matrice diagonale dei rischi specifici.

Consideriamo ora un portafoglio composto dagli *N* asset. Definito il vettore colonna dei pesi degli asset nel portafoglio

$$\mathbf{W} = \{w_a\} \quad a = 1...N$$

il rendimento del portafoglio è pari a

$$R_p = \sum_{a=1}^{N} w_a R_a = \mathbf{W}'\mathbf{R}$$

mentre la varianza è esprimibile come

$$\sigma_p^2 = \sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} w_a w_b \sigma_{ab} + \sum_{a=1}^{N} w_a^2 \sigma_{\varepsilon a}^2 = \mathbf{W}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{W}$$

La distribuzione dei rendimenti del portafoglio è quindi funzione di questa volatilità (radice quadrata della varianza e del rendimento espresso sopra)

A questo punto il VaR di portafoglio (ovvero la perdita massima con una certa probabilità è:

Equazione 2

$V_t \cdot (R_p - k\sigma_p)\sqrt{n}$ dove n è il numero di giorni o periodi se l'analisi è fatta con una granularità inferiore… quindi, per esempio, il VaR percentuale a 15 giorni è

Equazione 3

$V_t \cdot (R_p - k\sigma_p)\sqrt{15}$

Basics sulla Duration

La definizione standard di Duration di una obbligazione è la seguente.

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(i)t(i)}{V}$$

Dove $P(i)$ è il valore attuale della cedola i-esima, $t(i)$ è la data di pagamento futura, V è il prezzo del titolo Price e D è la duration conseguente.

Cash Flow e Duration

La duration è la media ponderata (pesata) del tempo residuo di un flusso di cassa di un titolo obbligazionario. Ad esempio per un titolo Zero Coupon (un BOT) la duration sarà $\Delta T = T_f - T_0$, dove T_f è la data di rimborso (redemption) e T_0 è la data di partenza del Bond. Se ci sono differenti flussi di cassa C_i la duration di ciascun flusso di cassa è data da $\Delta T_i = T_i - T_0$. Essendo r il tasso di interesse della obbligazione, considerando le formule di capitalizzazione composta degli ineressi otteniamo che il prezzo della obbligazione è dato da

$$V = \sum_i C_i e^{-r\Delta T_i}$$

Per calcolare la duration, ogni duration di ogni cashflow è ponderata per il proprio valore ed il tutto è diviso per il valore totale del titolo e di conseguenza la somma di questi pesi è 1.

$$D = \sum_i \Delta T_i \frac{C_i e^{-r\Delta T_i}}{V}$$

Quind più alto è il tasso di interesse di un bond più è corta la durtion. La duration è sempre minore o uguale alla maturità di una obbligazione. Soltanto una obbligazione zero coupon avrà una duration pari alla maturity.
La duration indica anche di quanto cambierebbe il valore della obbligazione nel caso di cambiamento del tasso di interesse legato alla obbligazione.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\sum_i \Delta T_i C_i e^{-r\Delta T_i} = -D \cdot V$$

Quindi per una piccola variazione δ*r* del tasso del bond abbiamo

$$\frac{\delta V}{V} = -D\delta r + O(\delta r^2)$$

Questo significa che la duration fornisce l'inverso della variazione relativa del valore di un bond rispetto ad una variazione del tasso di interesse del titolo stesso se si trascura il termine quadratico che viene preso in considerazione dalla convessità.

La **Dollar duration** è definita come il prodotto della duration e del prezzo (valore). Essa fornisce la variazione del valore del bond per una piccola variazione del tasso di interesse. La dollar duration è normalmente utilizzata per il calcol del VaR. Se $V = V(r)$ denota il valore di un titolo che dipende dal tasso r, allora la dollar duration è definita come:

$$D_\$:= -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Per illustrare l'applicazione al risk management di un portafoglio consideriamo un portafoglio di titoli il cui valore dipende da quello dei tassi di interesse $r_1, \ldots, r_n$ come fattori di rischio.

Se

$$V = V(r_1, \ldots, r_n)$$

denota il valore di questo portafoglio allora il vettori di esposizioni (pesi)

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ ha componenti

$$\omega_i = -D_{\$,i} := \frac{\partial V}{\partial r_i}$$

In conseguenza di ciò il cambiamento di valore del portafoglio può essere approssimato come:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta r_i + \sum_{1 \leq i,j \leq n} O(\Delta r_i \Delta r_j)$$

Sharpe ratio

Lo **Sharpe ratio** di un portafoglio di titoli, così chiamato in onore del premio Nobel per l'economia 1990 William Sharpe, è una misura della performance del portafoglio.
Essa esprime il rendimento di un portafoglio titoli, al netto del rendimento non rischioso (in inglese *riskfree rate*), normalmente inteso come il tasso d'interesse di prestiti statali AAA a breve scadenza), in rapporto al rischio (volatilità, deviazione standard) del portafoglio stesso. Viene così indicato il rendimento in termini percentuali per ogni unità di rischio del nostro investimento.
Se R_P è il rendimento del portafoglio, σ_P la sua deviazione standard (o volatilità), e R_f denota il tasso d'interesse privo di rischio, lo Sharpe ratio del portafoglio è pari a:

$$SR = \frac{\mathrm{E}(R_P) - R_f}{\sigma_P}$$

Ottimizzazione di portafoglio

L'ottimizzazione di portafoglio e la costruzione della frontiera efficiente sono realizzati con il modello di Markowitz, che si basa su criterio media-varianza.

Tra gli infiniti portafogli possibili il modello permette di individuare per ogni livello di rendimento quelli che presentano una volatilità minima o, viceversa, quelli che per ogni livello di volatilità presentano rendimento massimo.

Formalmente:

$$\min_{(w)} \quad w' \Sigma w$$

con i vincoli

$r_p = w'R = \mu$	(rendimento di portafoglio al livello prefissato μ)
$w'I=1$	(la somma dei pesi uguale al 100%)
$w_i>=0$	(pesi maggiori o al più uguali a 0)

oppure

$$\max_{(w)} \quad w'R$$

con i vincoli

$\sigma^2_p = w' \Sigma w = \sigma^2$	(varianza di portafoglio fissata a livello σ^2)
$w'I=1$	(la somma dei pesi uguale al 100%)
$w_i>=0$	(pesi maggiori o al più uguali a 0)

con
R = vettore dei rendimenti attesi
Σ = matrice var-cov
w = vettore dei pesi dei componenti di portafoglio
I = vettore di elementi unitari

MoneyController €=MC